Série de Fourier du redressement simple alternance

RAPPELS

Forme trigonométrique

Pour une fonction périodique f(t) de période T, la série de Fourier est :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]$$

Avec les coefficients définis par :

- $a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt$
- $a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\, dt$
- $b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\, dt$

où t_0 est un point de départ arbitraire (souvent 0 ou $-T/2$).

Forme complexe

On peut aussi exprimer f(t) en utilisant des exponentielles complexes :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\, dt$$

Simplification avec identité trigonométrique

On utilise l'identité :

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin(x)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin((1+n)x) + \sin((1-n)x)\right]$$

CORRECTION

1. Définition de la fonction

On part d'une tension sinusoïdale :

$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$

Après passage dans un pont redresseur à **1 seule diode**, on obtient la fonction suivante sur une période $T = 2\pi/\omega$:

$$f(t) = \begin{cases} V_m \sin(\omega t), & \text{si } \sin(\omega t) \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

- Sur $[0, \pi/\omega]$, $f(t) = V_m \sin(\omega t)$
- Sur $[\pi/\omega, 2\pi/\omega]$, $f(t) = 0$

2. On change de variable pour simplifier :

Posons $x = \omega t$, donc la période devient 2π, et la fonction devient :

$$f(x) = \begin{cases} V_m \sin(x), & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

On calcule alors la **série de Fourier en forme trigonométrique** sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

3. Calcul des coefficients

a. Coefficient a_0 (terme constant) :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} V_m \sin(x)\, dx = \frac{V_m}{2\pi} [-\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{V_m}{2\pi} [1 + 1] = \frac{V_m}{\pi}$$

b. Coefficients a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_m \sin(x) \cos(nx)\, dx$$

Utilisons l'identité :

$$\sin(x) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin((1+n)x) + \sin((1-n)x)]$$

Donc :

$$a_n = \frac{V_m}{2\pi} \int_0^{\pi} [\sin((1+n)x) + \sin((1-n)x)]\, dx$$

Les intégrales de sinus sur $[0, \pi]$ donnent :

$$\int_0^\pi \sin(kx)dx = \begin{cases} \frac{2}{k}, & \text{si } k \text{ impair} \\ 0, & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$$

Donc en général :

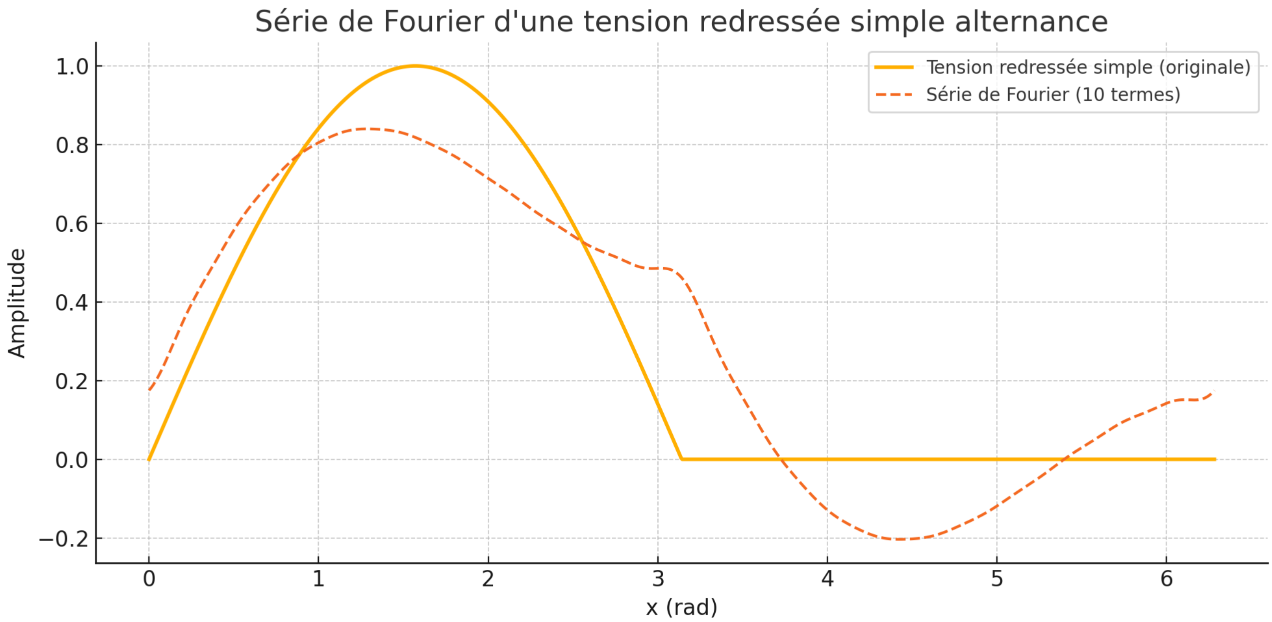
$$a_n = \begin{cases} \frac{2V_m}{\pi(1-n^2)}, & \text{si } n \text{ impair} \\ 0, & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

c. Coefficients b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V_m \sin(x) \sin(nx)\, dx$$

On utilise l'identité :

$$\sin(x)\sin(nx) = \frac{1}{2}[\cos((1-n)x) - \cos((1+n)x)]$$



Voici la représentation de la **tension redressée simple alternance** (en bleu) et sa **reconstruction par la série de Fourier tronquée à 10 termes** (en pointillés). On observe bien que la série de Fourier s’approche de la forme d’origine

Voici le **spectre harmonique** de la tension redressée simple alternance :

- On observe que **seules les harmoniques impaires** (1, 3, 5, ...) sont présentes.
- L'amplitude décroît rapidement avec l'ordre harmonique, ce qui est typique des fonctions "lisses par morceaux".

- L’harmonique fondamentale (n = 1) est dominante.